Uskottavuusperusteisten luottamusvälien korjaaminen bootstrap-menetelmällä Pro gradu -esitelmä

29.4.2009

Anna Wiksten

Johdanto

- Informatiivinen tapa tehdä tilastollista päättelyä jollekin kiinnostuksen kohteena olevalle parametrifunktiolle on laskea luottamusvälejä
- Yleisesti käytetty menetelmä on delta-metodi, jonka erikoistapaus on Waldin väli
- Toinen menetelmä on muodostaa välit profiiliuskottavuusfunktiosta
- Profiiliuskottavuusvälit ovat yleensä approksimatiivisia
- Tutkielman tarkoitus on yrittää parantaa profiiliuskottavuusvälien peittotodennäköisyyttä bootstrapin avulla

Johdanto

- Tutkielman rakenne:
  1. Hyvän luottamusvälin kriteereistä
  2. Profiiliuskottavuusperusteinen luottamusväli
  3. Bootstrap-korjaus profiiliuskottavuusperusteiselle luottamusvälille
  4. Bootstrap-metodilla muodostettujen luottamusvälien pituus

Hyvän luottamusvälin kriteereistä

- Tutkielmassa hyvän luottamusvälin kriteereinä pidetään uskottavuuslain toteutumista ja hyvää peittotodennäköisyyttä
- Kumpikaan ei ole yksinään riittävä ehto

Uskottavuuslaki

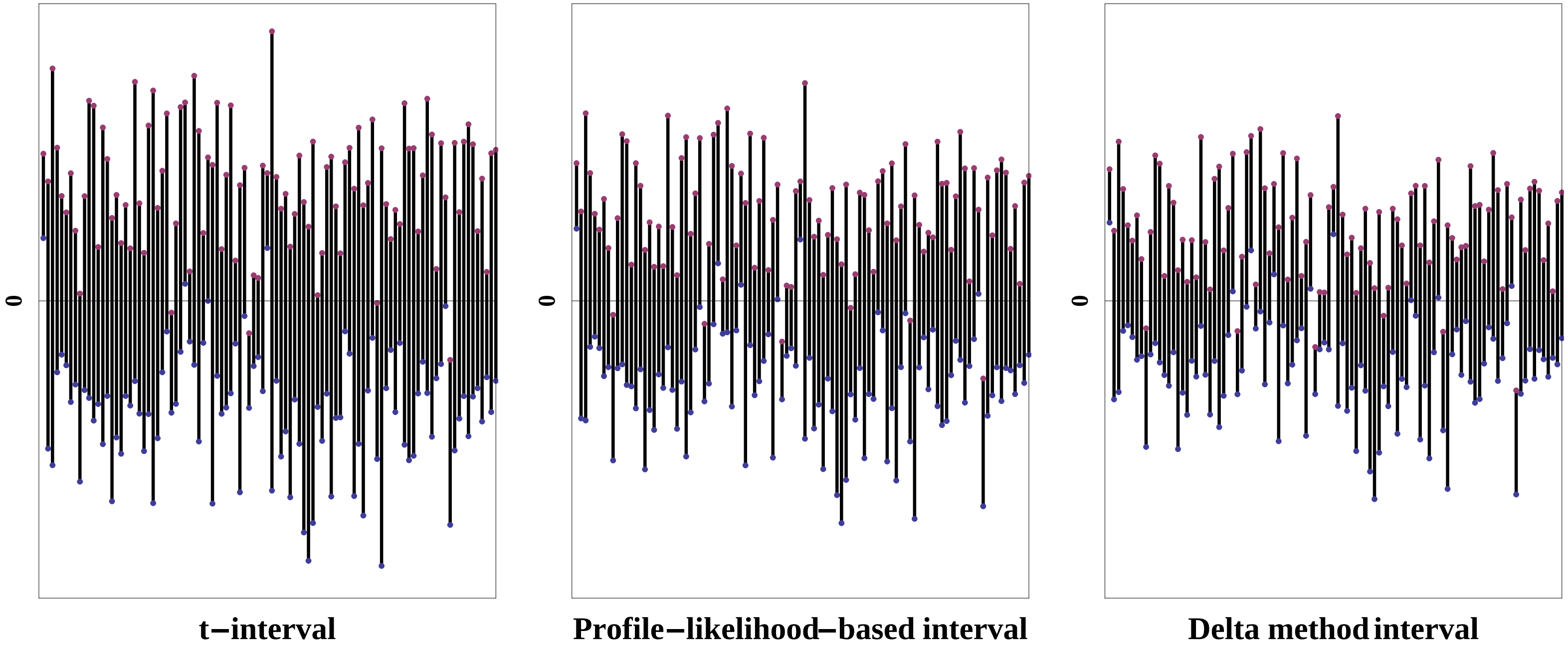
- Välin sisäpuolella olevien arvojen tulisi olla jollakin tapaa parempia ψ:n estimaatteja kuin välin ulkopuolella olevien arvojen
- Uskottavuusperusteiset välit noudattavat uskottavuuslakia
- **Uskottavuuslaki**. Havaintoaineisto y_{obs} tukee parametrin arvoa ω_1 enemmän kuin arvoa ω_2 , silloin ja vain silloin, jos $L_M(\omega_1; y_{\text{obs}}) > L_M(\omega_2; y_{\text{obs}})$. Toisin sanoen, jos Pr $(y_{\text{obs}}|\omega_1)$ on suurempi kuin Pr $(y_{\text{obs}}|\omega_2)$.

Peittotodennäköisyys

- Havaitun aineiston satunnaisvaihtelusta johtuen luottamusväli $[\hat{\psi}_L, \hat{\psi}_U]$ on satunnainen
- Välin peittotodennäköisyys:
  $\mathrm{CP}\,(\psi) = \Pr\left(\hat{\psi}_L \leq \psi \leq \hat{\psi}_U; \psi\right)$
- Jos peittotodennäköisyys on suurempi kuin nominaalinen luottamustaso, välejä sanotaan konservatiivisiksi
- Jos peittotodennäköisyys on pienempi kuin nominaalinen luottamustaso, välejä sanotaan liberaaleiksi

Peittotodennäköisyys

Otos standardoidusta normaalijakaumasta



Tilastollinen evidenssi ja uskottavuusfunktio

- Tilastollinen evidenssi koostuu ainakin kahdesta komponentista, havaintoaineistosta y_{obs} ja sen tilastollisesta mallista $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \{p(y;\omega) : y \in \mathcal{Y}, \omega \in \Omega\}$$

- Uskottavuusfunktio määritellään seuraavasti

$$L_{\mathcal{M}}(\omega;\tilde{y}) = c(\tilde{y})p(\tilde{y};\omega),$$

  jossa $c(\tilde{y})$ on sattumanvarainen positiivinen vakio

- Logaritminen uskottavuusfunktio

$$l_{\mathcal{M}}(\omega;\tilde{y}) = \ln(L_{\mathcal{M}}(\tilde{y};\omega))$$

Profiiliuskottavuusfunktio

- Olkoon $g(\omega)$ kiinnostuksen kohteena oleva parametrifunktio, jonka arvo on reaaliarvoinen vektori ψ
- Tällöin

$$L_g(\psi; y_{\text{obs}}) = \max_{\{\omega \in \Omega : g(\omega) = \psi\}} L(\omega; y_{\text{obs}}) = L(\tilde{\omega}_\psi; y_{\text{obs}})$$

on kiinnostuksen kohteena olevan parametrifunktion g profiiliuskottavuusfunktio ja $l_g(\psi; y_{\text{obs}}) = \max_{\{\omega \in \Omega : g(\omega) = \psi\}} l(\omega; y_{\text{obs}}) = l(\tilde{\omega}_\psi; y_{\text{obs}}) = \ln(L_g(\psi; y_{\text{obs}}))$ on logaritminen profiiliuskottavuusfunktio

Profiiliuskottavuusperusteisen luottamusvälin muodostaminen

- Uskottavuusosamäärästatistikalla o$-2r_g(\psi; y_{\text{obs}})(= 2\{l_g(\hat{\psi}; y_{\text{obs}}) - l_g(\psi; y_{\text{obs}})\})$ on likimäärin $\chi^2_{1-\alpha}[1]$-jakauma
- Joukko

$$\left\{\psi : l_g(\psi; y_{\text{obs}}) \geq l_g(\hat{\psi}; y_{\text{obs}}) - \frac{\chi^2_{1-\alpha}[1]}{2}\right\} = [\hat{\psi}_L, \hat{\psi}_U]$$

muodostaa likimääräisen (1-α)-tason luottamusvälin ψ:lle

Esimerkki

$\mathcal{M}$ =IndependenceModel

[SamplingModel[PoissonModel[μ_1],3],[SamplingModel[PoissonModelμ_2],2]

Kiinnostuksen kohteena oleva parametrifunktio on keskiarvojen suhde

$$\psi = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Olkoon havaitut aineistot (6,1,2) ja (6,2)

$$L_{\mathcal{M}}((\mu_1, \mu_2); y_{\mathrm{obs}}) = \frac{e^{-3\mu_1 - 2\mu_2}\mu_1^9\mu_2^8}{2073600} \tag{1}$$

$$l_{\mathcal{M}}((\mu_1, \mu_2); y_{\mathrm{obs}}) = -2\mu_2 - 3\mu_1 - \text{Log}[2073600] + 8\text{Log}[\mu_2] + 9\text{Log}[\mu_1]. \tag{2}$$

Esimerkki

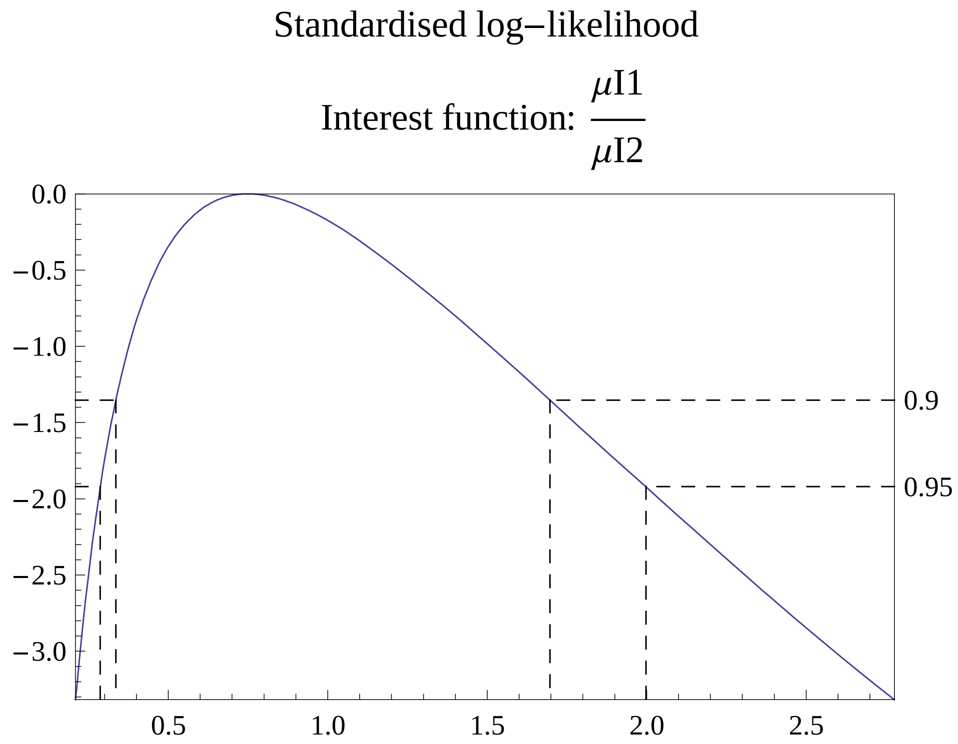
Uudelleen parametrisoitu uskottavuusfunktio

$$l_{\mathcal{M}}((\psi, \mu_2)\,; y_{\text{obs}}) = -2\mu_2 - 3\mu_2\psi - \text{Log}[2073600] + 8\text{Log}[\mu_2] + 9\text{Log}[\mu_2\psi]. \tag{3}$$

ψ:n profiiliuskottavuusfunktio

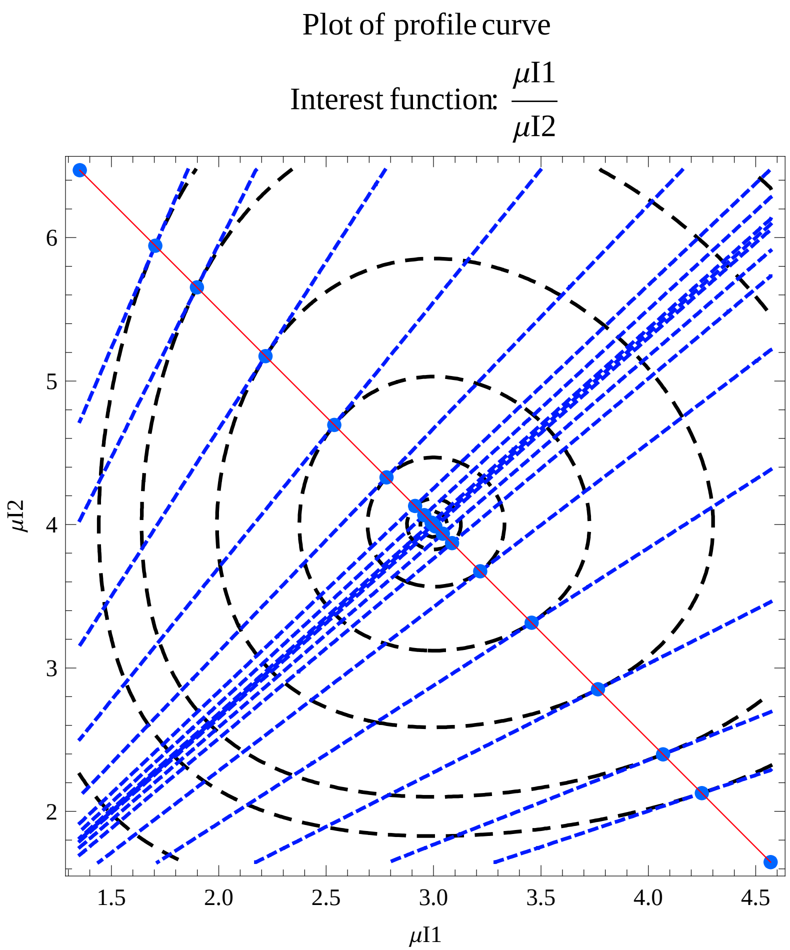
$$\begin{aligned} l_g(\psi; y_{\text{obs}}) = &-\frac{34}{2+3\psi} - \frac{51\psi}{2+3\psi} - \text{Log}\,(2073600) \\ &+8\text{Log}\left(\frac{17}{2+3\psi}\right) + 9\text{Log}\left(\frac{17\psi}{2+3\psi}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Esimerkki



Standardised log−likelihood
Interest function: μI1 / μI2
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
0.9
0.95
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

Esimerkki


Plot of profile curve
Interest function: $\frac{\mu I1}{\mu I2}$
6
5
4
3
2
μI2
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
μI1

Bootstrap

- Bradley Efron 1979
- Simulointiin perustuva menetelmä tilastollisten estimointiin
- On olemassa epäparametrinen ja parametrinen bootstrap

Parametrinen bootstrap

- Olkoon $y_{obs}= y_1, \ldots, y_n$ satunnaisotos jostakin jakaumasta *F*, jonka parametrivektori on ω
- $\hat{\omega}$ on ω:n suurimman uskottavuuden estimaatti
- $\hat{F}$, jonka parametrivektori on $\hat{\omega}$, on tällöin jakauman *F* estimaatti
- Parametrisessa bootstrapissa otetaan *B* *n*:n kokoista satunnaisotosta $\hat{F}$:sta

$$\hat{F} \longrightarrow (y_1^*, \ldots, y_n^*).$$

- Tutkielmassa sovelletaan parametrista bootstrappia uskottavuusosamäärästatistikan jakauman estimoimiseen

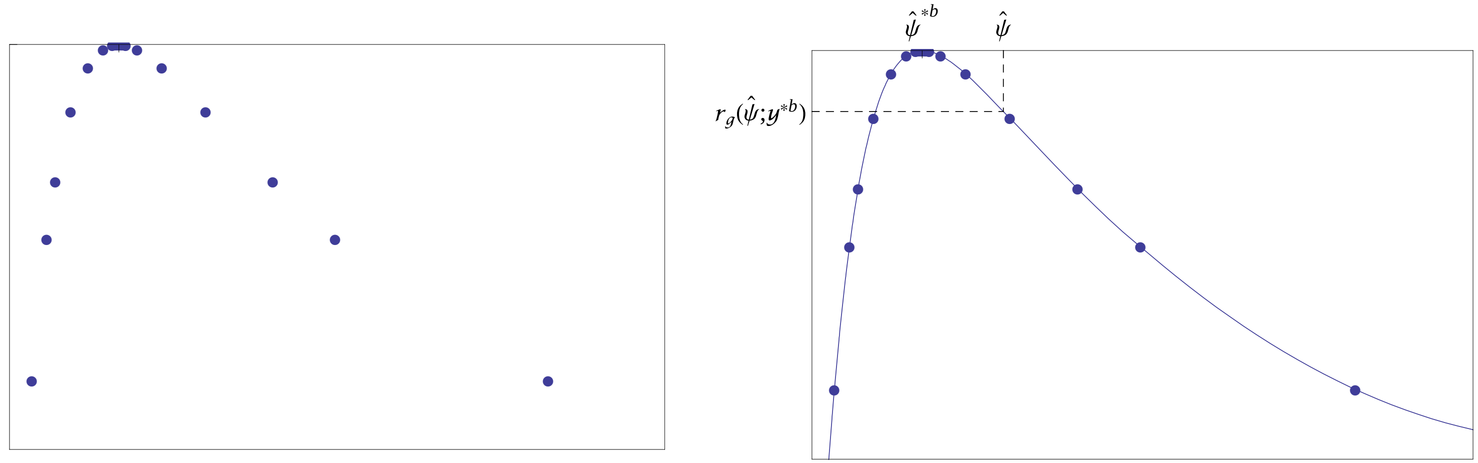
Korjaus tapa 1

- Esitetty aiemmin kirjallisuudessa
- Lasketaan uskottavuusosamäärästatistika $w_{\mathrm{H}}\left(y^b_{\mathrm{obs}}\right) = -2r_g(\psi; y^b_{\mathrm{obs}}) = -2(l(\hat{\psi}; y^b_{\mathrm{obs}}) - l(\hat{\psi}^b; y^b_{\mathrm{obs}}))$ jokaiselle bootstrap-otokselle
- Muodostetaan uskottavuusosamäärästatistikan empiirinen jakauma ja lasketaan haluttu kvantiili
- Uskottavuusosamäärästatistikan muodostaminen saattaa olla vaikeaa monimutkaisemmille parametrifunktioille

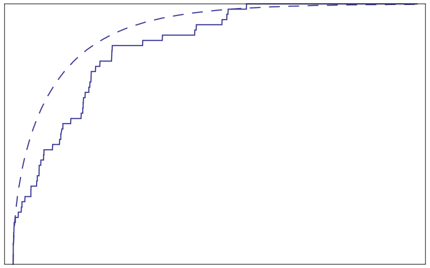
Korjaus tapa 2

- Lasketaan kiinnostuksen kohteena olevan parametrifunktion luottamusvälejä eri luottamustasoilla
- Muodostetaan interpoloimalla kiinnostuksen kohteena olevan parametrifunktion profiiliuskottavuuskäyrän approksimaatio
- Lasketaan uskottavuusosamäärästatistikan arvo profiilikäyrästä
- Muodostetaan uskottavuusosamäärästatistikan empiirinen jakauma ja lasketaan haluttu kvantiili

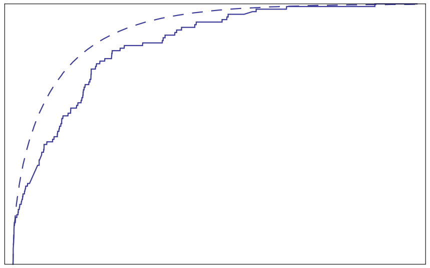
Korjaus tapa 2



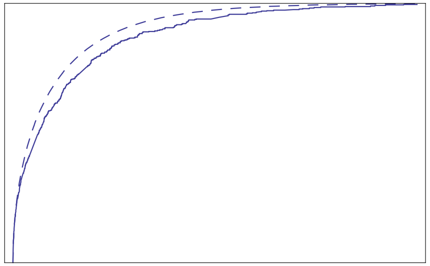
UO-statistikan bootstrap-jakauma



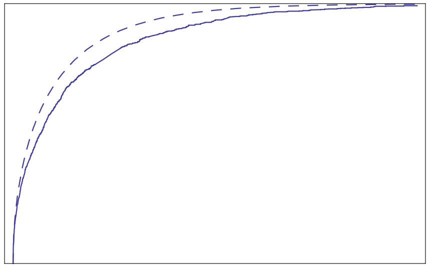
B=50



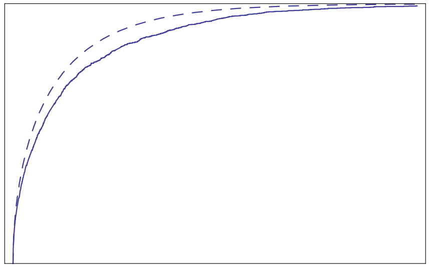
B=100



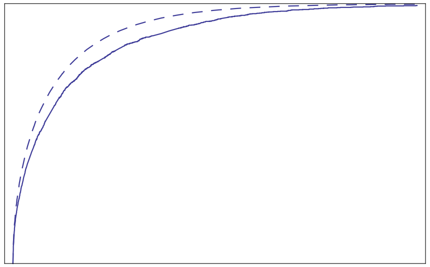
B=500



B=1000



B=1500

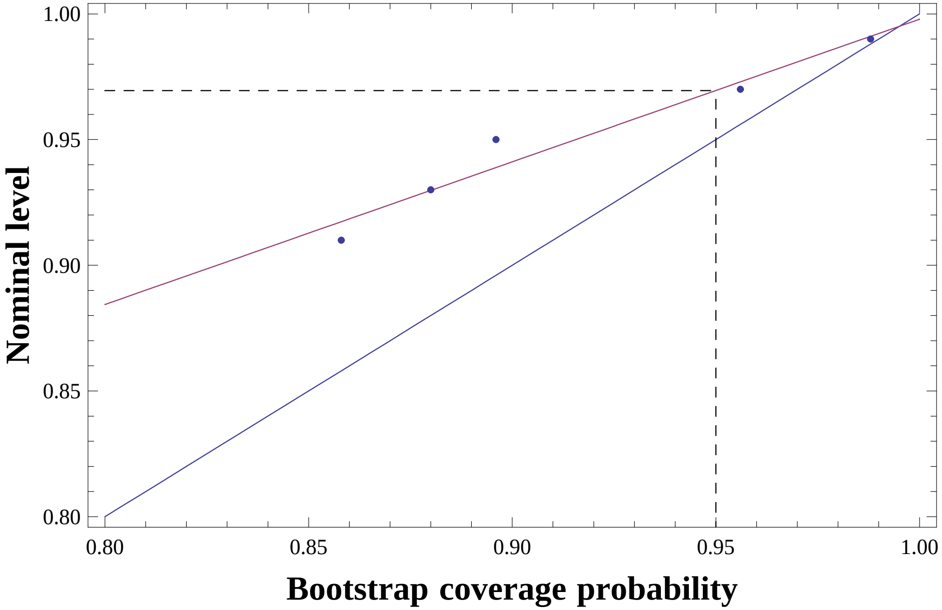


B=2000

Korjaus tapa 3

- Lasketaan luottamusvälejä halutun luottamustason läheisyydestä
- Lasketaan välien peittotodennäköisyydet bootstrap-otoksissa
- Sovitetaan suora nominaalisten luottamustasojen ja bootstrap-otoksista laskettujen peittotodennäköisyyksien muodostamaan pistejoukkoon
- Lasketaan suorasta nominaalinen luottamustaso, jolla saadaan haluttu peittotodennäköisyys

Korjaus tapa 3



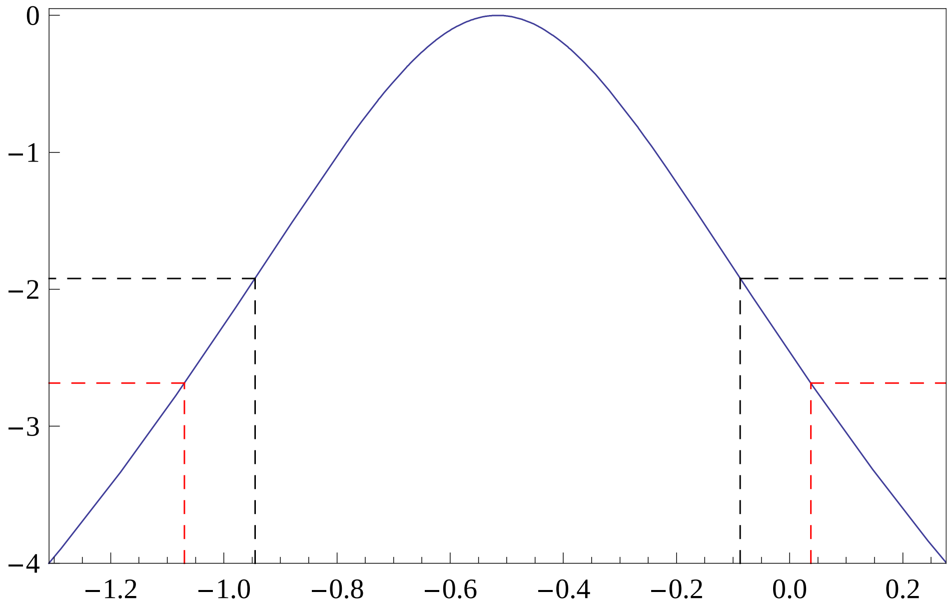
Sovellus t-väliin

- Normaalijakauman tapauksessa voidaan laskea tarkkoja luottamusvälejä t-jakaumasta
- Voidaan osoittaa, että t-välit ovat myös profiiliuskottavuusperusteisia väleja
- Jos havaintoaineiston koko on 5 käytettävä kvantiili saadaan seuraavasti:

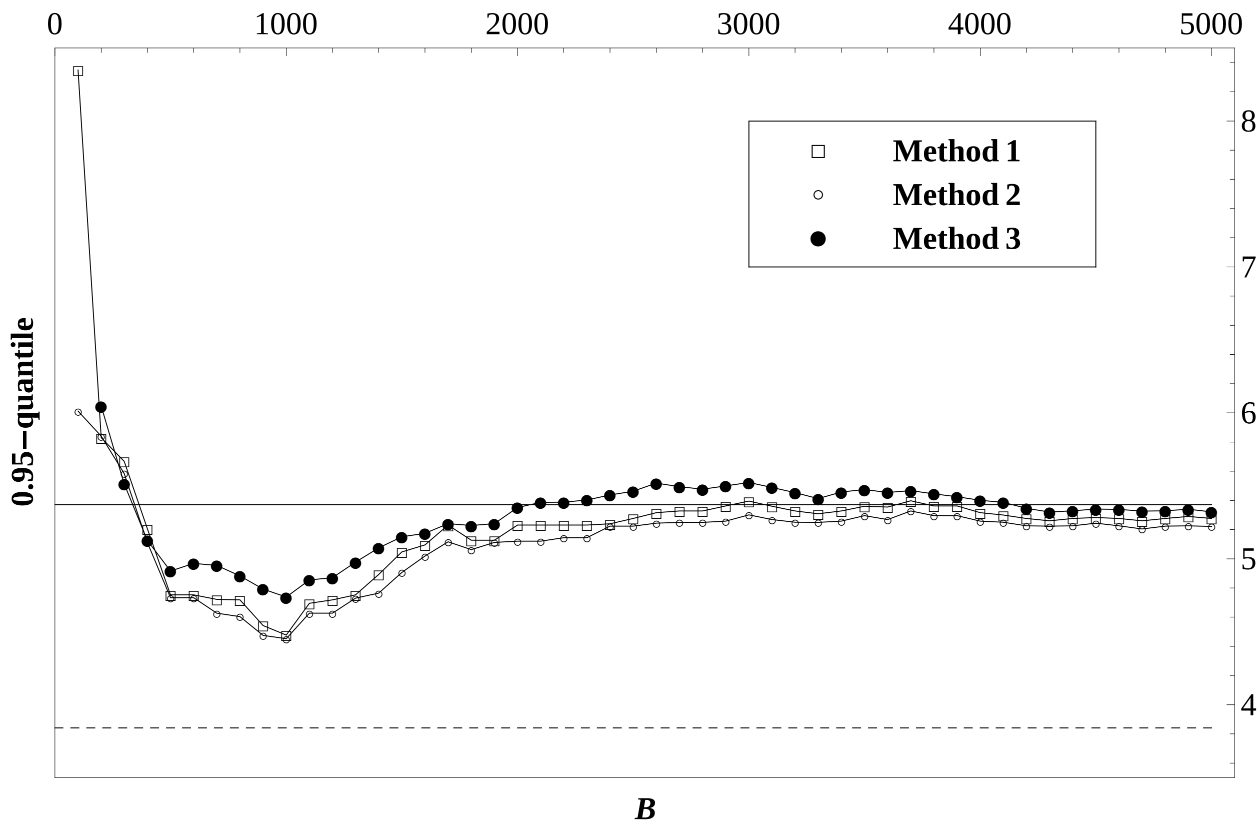
$$
\begin{aligned}
q_{0.95} &= n\log\left\{1 + \frac{F_{0.95}\left[1, n-1\right]}{n-1}\right\} \qquad (5)\\
&= 5\log\left\{1 + \frac{7.709}{5-1}\right\}\\
&= 5.370
\end{aligned}
$$

Sovellus t-väliin

Profiiliuskottavuusfunkio normaalijakauman keskiarvolle



Sovellus t-väliin



Simulointi

- Korjausten toimivuutta tutkittiin simuloimalla tilanteessa, jossa uskottavuusosamäärästatistikan tarkkaa jakaumaa ei tunneta
- Simuloiduille havaintoaineistoille laskettiin peittotodennäköisyydet ja uskottavuusosamäärästatistikan empiirisen jakauman 95%:n kvantiilit
- Simulointeja tehtiin yhteensä 1000

Tilastollinen malli

$\mathcal{M}$ =IndependenceModel

[{SamplingModel[WeibullModel[κ, λ_1],5],SamplingModel[WeibullModel[κ, λ_2],5]}]

- Mallin parametrivektori on $\omega = (\kappa, \lambda_1, \lambda_2)$

Weibulljakauman tiheys- ja kertymäfunktiot ovat muotoa

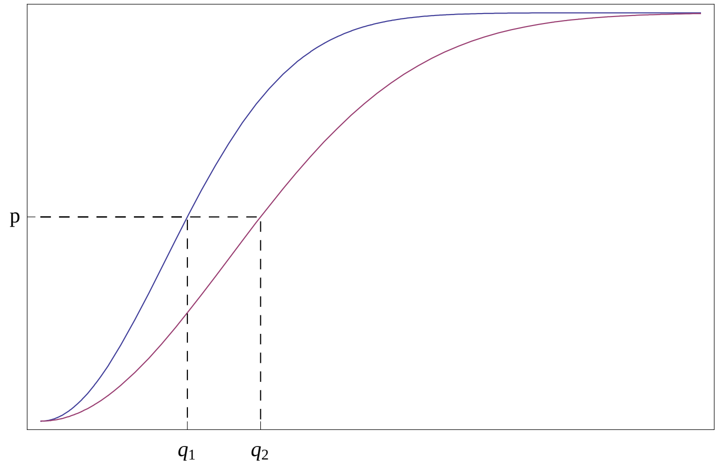
$$p(y; \kappa, \lambda) = e^{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\kappa}} y^{-1+\kappa} \kappa \lambda^{-\kappa}$$

$$\Pr(Y \leq y) = 1 - e^{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\kappa}}$$

Kvantiilien suhde

Kiinnostuksen kohteena oleva parametrifunktio

$$
\begin{aligned}
\psi &= \frac{q_1}{q_2} \\
&= \frac{\lambda_1(-\log(1-p))^{\frac{1}{\kappa}}}{\lambda_2(-\log(1-p))^{\frac{1}{\kappa}}} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}
\end{aligned}
$$



Simuloinnin tulokset

Method		Coverage probability	Coverage error	Lower error	Upper error
Delta		0.854	0.096	0.043	0.103
Profile likelihood-based		0.899	0.051	0.058	0.043
Bootstrap adjusted profile likelihood-based	B				
Method 1	500	0.956	0.006	0.027	0.017
	1000	0.959	0.009	0.025	0.016
	1500	0.959	0.009	0.025	0.016
	2000	0.958	0.008	0.027	0.015

Simuloinnin tulokset

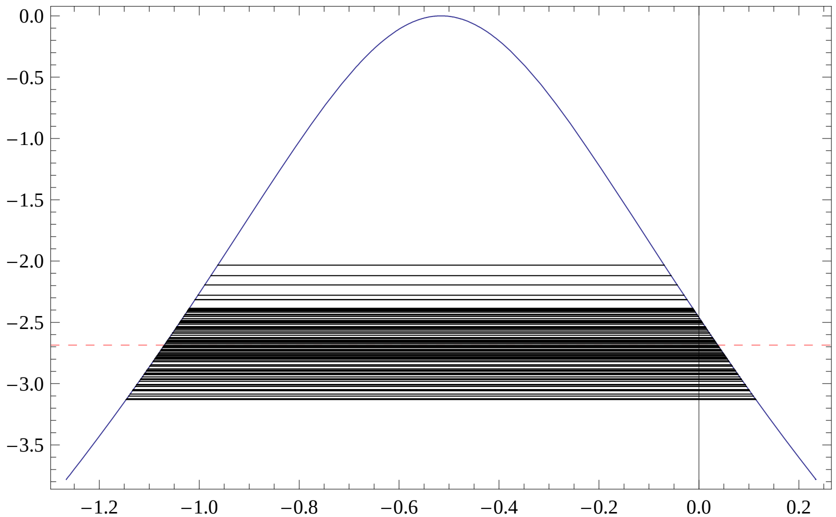
Method		Coverage probability	Coverage error	Lower error	Upper error
Bootstrap adjusted profile likelihood-based	B				
Method 2	500	0.956	0.006	0.027	0.017
	1000	0.956	0.006	0.027	0.017
	1500	0.957	0.007	0.026	0.017
	2000	0.958	0.008	0.027	0.015
Method 3	500	0.961	0.011	0.024	0.015
	1000	0.959	0.009	0.024	0.017
	1500	0.958	0.008	0.026	0.016
	2000	0.959	0.009	0.026	0.015

Luottamusvälin pituus

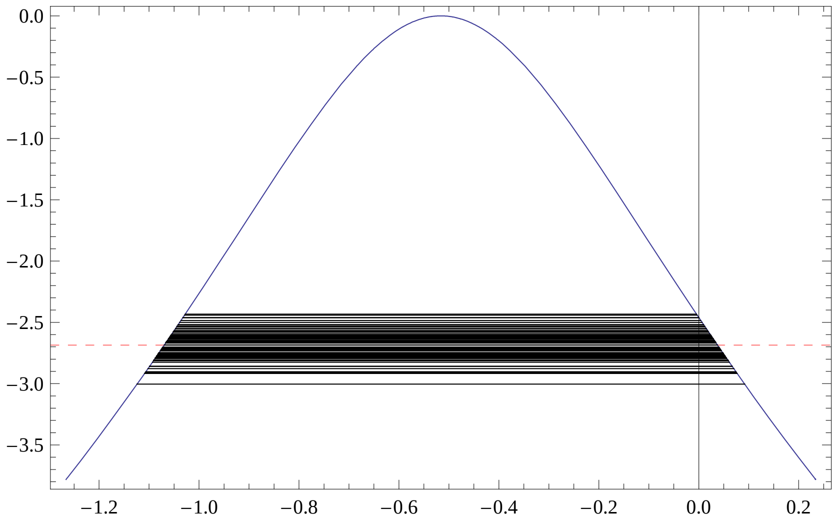
- Simuloinnin perusteella jo 500 bootstrap-otosta riittäisi korjaamaan peittotodennäköisyyden
- Todellisuudessa korjaus saavutettaisiin jo huomattavasti pienemmilläkin bootstrap -otosten lukumäärillä
- Liian pieni bootstrap-otosten lukumäärä vaikuttaa kuitenkin luottamusvälien pituuteen

Luottamusvälin pituus

100 bootstrap-korjattua luottamusväliä normaalijakauman keskiarvolle

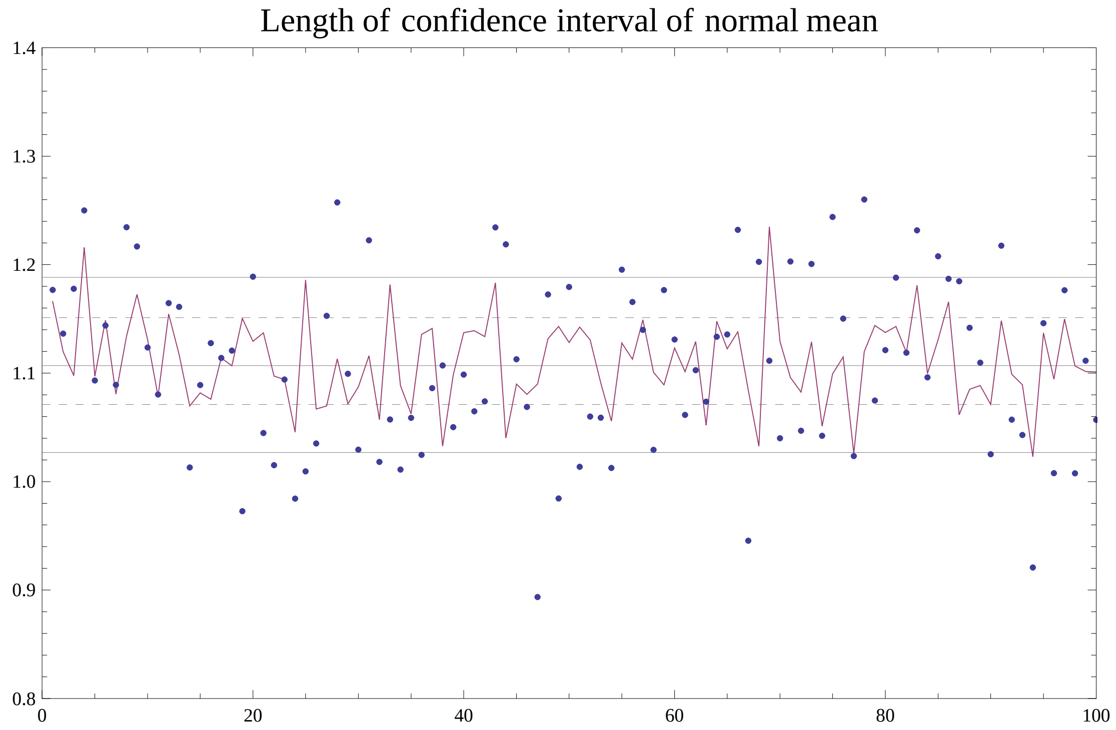


B=500



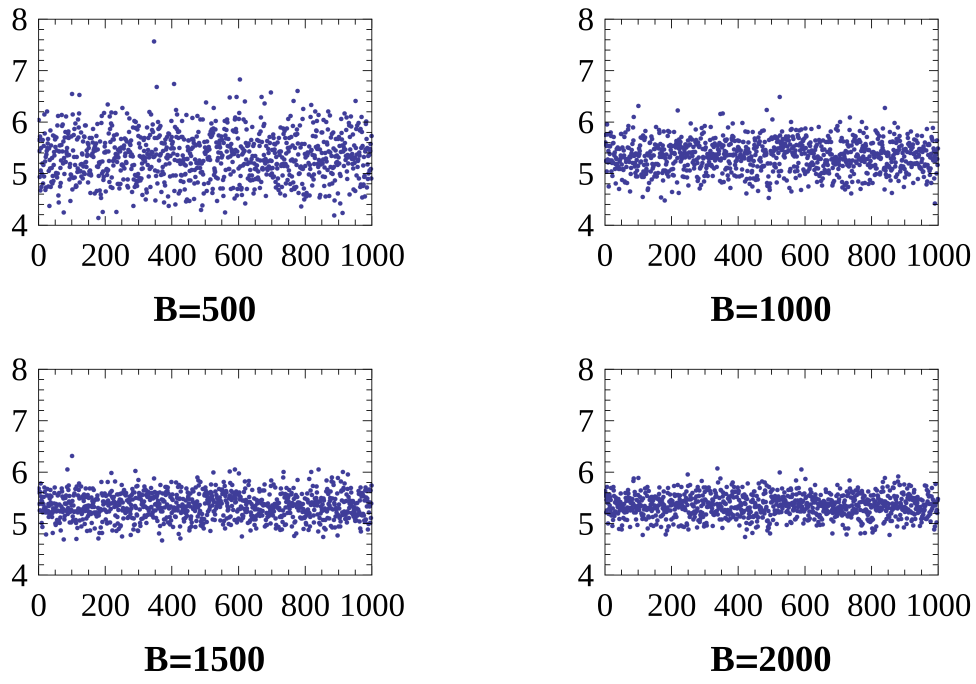
B=2000

Luottamusvälin pituus



Luottamusvälin pituus

Simuloitujen aineistojen kvantiilien sirontakuvioita



Lopuksi

- Tutkielmissa tehtyjen simulointien perusteella myös kaksi uutta korjausta toimivat peittotodennäköisyyden korjaamisessa
- Peittotodennäköisyyttä ei voida pitää ainoana kriteerinä muodostettaessa luottamusvälejä bootstrap-metodilla